یک مسئله و چند راه‌حل
مجموع عددهای طبیعی فرد متوالی

محسن کیخائی، حسین کریمی

مسئله: مجموع عددهای طبیعیِ فردِ متوالی با شروع از ۱ را بیابید.
همان‌طور که می‌دانید، عددهای طبیعی فرد عددهایی هستند که باقی‌ماندهٔ تقسیمشان بر عدد ۲، برابر ۱ است.
دنبالهٔ عددهای طبیعی فرد به‌صورت زیر است:

۱ ,۳ ,۵ ,۷ , ...

و با جزئیات بیشتر:

شمـارهٔ جمله:	**۱**	**۲**	**۳**	**۴**	**...**	**n**	**...**
مقـدار جمله:	**۱**	**۳**	**۵**	**۷**	**...**	**...**	**...**
	↓	↓	↓	↓			
	$۲\times۱-۱$	$۲\times۲-۱$	$۲\times۳-۱$	$۲\times۴-۱$			

بنابراین، جملهٔ nام (جملهٔ عمومی) دنبالهٔ عددهای طبیعی فرد متوالی با شروع از ۱، برابر ۱−۲n است.

مثال ۱. پنجاهمین عدد طبیعی فرد چه عددی است؟
پاسخ: بـا قرار دادن عدد ۵۰ (شـمارهٔ جمله) به جای n در جملهٔ عمومی به‌دست‌آمده در بالا، داریم: $۲\times۵۰-۱=۹۹$

مثال ۲. در نمونه‌های زیر:

الف) $۱+۳=۴$
ب) $۱+۳+۵=۹$
ج) $۱+۳+۵+۷=۱۶$
د) $۱+۳+۵+۷+۹=۲۵$

حاصل هر قسمت مربع کامل است: ۴، ۹، ۱۶ و ۲۵ و با دقت بیشتر می‌بینیم که در واقع این مربع کامل، مربع تعداد جمله‌های سمت دیگر تسـاوی است. مثلاً در حالت (د)، پنج جملهٔ عددهای طبیعی فرد متوالی با شـروع از ۱، با هم جمع شـده‌اند و در طـرف دیگر داریم: ۲۵ که همان $۵^۲$ است.

پس به نظر می‌رسد (حدس می‌زنیم) برای حالت کلی داریم:

$$۱+۳+۵+...+(۲n-۱)=n^۲$$

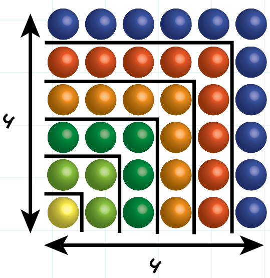
(چرا تعداد جمله‌های دنبالهٔ $۱,۳,۵,...,(۲n-۱)$ برابر n است؟)

مثال ۳. بدون انجام محاسبه، مجموع شش عدد طبیعی فرد متوالی با شروع از ۱ را به دست آورید. دلیلی برای پاسخ خود بیاورید.
پاسخ: با توجه به حدس قبل می‌توان نوشت:

$$۱+۳+۵+۷+۹+۱۱=۶^۲=۳۶$$

شکل ۱ درسـتی این رابطه را به‌خوبی نشان می‌دهد. (چرا)؟

شکل ۱



با توجه به مباحث بالا، صورت معادل با مسـئلهٔ آغازین به زبـان ریاضی چنین است:

ثابت کنید:

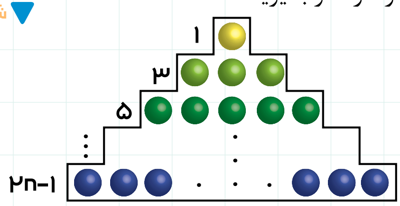
$$۱+۳+۵+...+(۲n-۱)=n^۲$$

اکنون درستی این رابطه را به چند روش نشان می‌دهیم:

روش اول

شکل ۲ را در نظر بگیرید.

شکل ۲



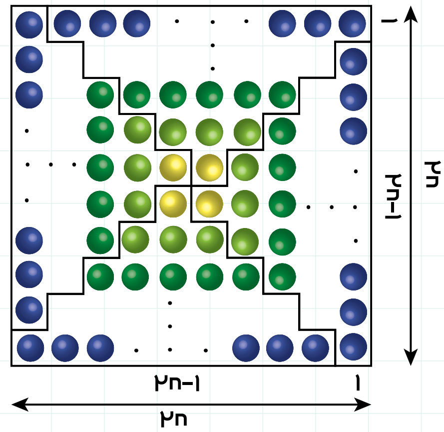
$$N=۱+۳+...+(۲n-۱)$$

N تعداد کل گوی‌های موجود در این شکل است.

حالا چهار نسخه از شکل ۲ را در کنار هم قرار می‌دهیم تا شکل ۳ به دست آید. داریم:

$$\Rightarrow N = \frac{N'}{4} = \frac{4n^2}{4} = n^2$$

شکل ۳

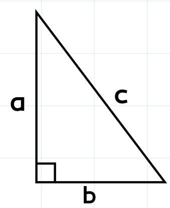


$$N' = 2n \times 2n = 4n^2$$

که N' تعداد گوی‌های شکل ۳ است.

قبل از بیان روش دوم، چند نکته و مثال مرتبط با آن را ببینید.

یادآوری: در هر مثلث قائم‌الزاویهٔ دلخواه مانند شکل ۴، رابطهٔ زیر برقرار است (رابطهٔ فیثاغورس):

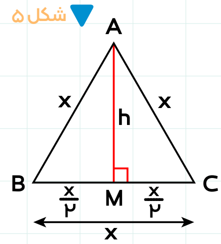


شکل ۴

$$b^2 + a^2 = c^2$$

مثال۴: مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع x واحد را به دست آورید.

شکل ۵



می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، هر سه ارتفاع دارای اندازهٔ برابر و عمودمنصفِ ضلع مقابل هستند.

با توجه به یادآوری، اندازهٔ ارتفاع h را بر حسب طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به دست می‌آوریم (مثلث AMC در شکل ۵ قائم‌الزاویه):

$$(\frac{x}{2})^2 + h^2 = x^2 \Rightarrow h^2 = x^2 - (\frac{x}{2})^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4}$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

با در نظر گرفتن ارتفاع $h = \frac{x\sqrt{3}}{2}$ و قاعدهٔ BC=x مساحت مثلث ABC از این قرار است:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} x \times \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

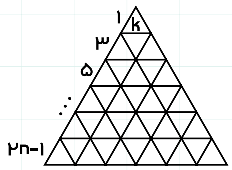
مثال۵. مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۱ واحد را به دست آورید.

کافی است در فرمول به‌دست‌آمده در مثال ۴، قرار دهیم: x=۱.

در نتیجه، مساحت این مثلث برابر است با: $\frac{1^2 \times \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

روش دوم

شکل ۶ را در نظر بگیرید.

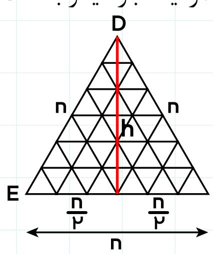


شکل ۶

تعداد مثلث‌های هر ردیف در کنار آن نوشته شده است. مثلث‌های تشکیل‌دهندهٔ تمام ردیف‌ها، مثلث متساوی‌الاضلاعِ یکسان، به ضلع ۱واحد و مساحت k هستند. پس مساحتِ کل برابر است با:

$$S = 1k + 3k + 5k + \ldots (2n-1)k$$
$$= k[1+3+5+\ldots+(2n-1)]$$

اکنون این مساحت را به کمک مثال ۴ به دست می‌آوریم. مثلث DEF در شکل ۷ متساوی‌الاضلاع و طول هر ضلع آن n است. (برای یافتن دلیل، شکل ۶ را یک بار دیگر با دقت ببینید.)



شکل ۷

در اینجا قاعده و ارتفاع به‌ترتیب برابرند با:

$$h = \frac{n\sqrt{3}}{2} \text{ و } EF=n$$

بنابراین:

$$S' = \frac{1}{2} \times n \times \frac{n\sqrt{3}}{2} = \frac{n^2\sqrt{3}}{4}$$

از آنجا که مساحت یک شکل به هر روشی که به دست بیاید، مقدار ثابتی است، داریم:

$$\Rightarrow S = S' \Rightarrow k[1+3+5+\ldots+(2n-1)] = \frac{n^2\sqrt{3}}{4}$$

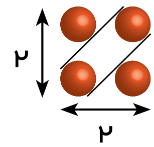
$$\xrightarrow{k=\frac{\sqrt{3}}{4}} \frac{\sqrt{3}}{4}[1+3+5+\ldots+(2n-1)] = \frac{n^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow [1+3+5+\ldots+(2n-1)] = n^2$$

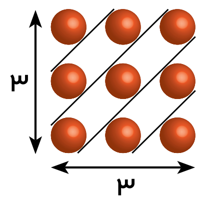
توجه دارید که مقدار k را قبلاً در مثال ۵ به دست آوردیم.

روش سوم

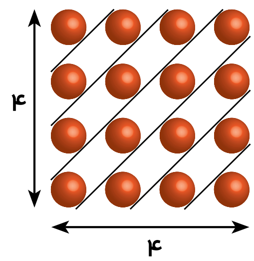
شکل ۸



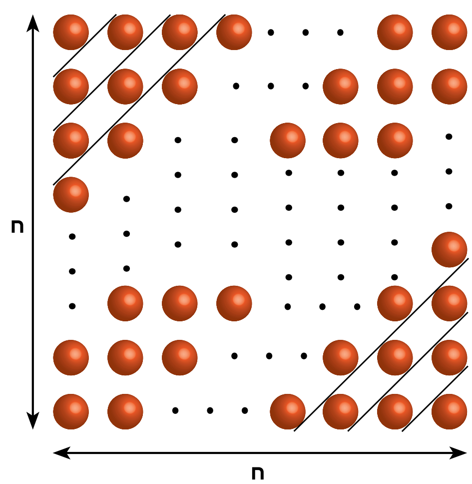
$$۱+۳=۱+۲+۱=۲^۲$$



$$۱+۳+۵=۱+۲+۳+۲+۱=۳^۲$$



$$۱+۳+۵+۷=۱+۲+۳+۴+۳+۲+۱=۴^۲$$



$$۱+۳+۵+...+(۲n-۱)=$$
$$۱+۲+۳+...+(n-۱)+n+(n-۱)+...+۳+۲+۱=n^۲$$

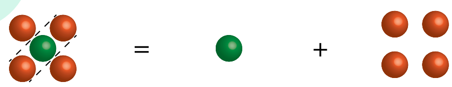
روش چهارم

آنچه را در مثال ۳ دیدید، می‌توان برای حالت کلی $۱+۳+۵+...(۲n-۱)=n^۲$ نیز به کار گرفت! (چگونه؟)

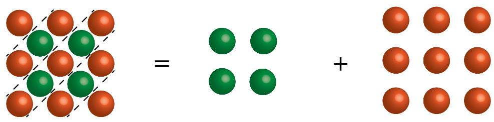
تمرین ۱: مجموع ۱۰۰ عدد طبیعی فرد متوالی با شروع از ۴۷۵ را به دست آورید.

تمرین ۲: با توجه به نمونه‌های داده‌شده در شکل ۹، پاسخ مناسبی برای حالت کلی پیدا کنید.

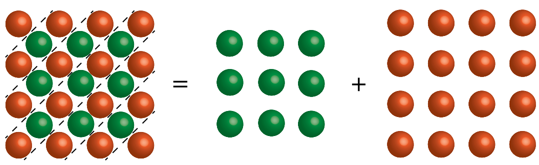
شکل ۹



$$۱+۳+۱=۱^۲+۲^۲$$



$$۱+۳+۵+۳+۱=۲^۲+۳^۲$$



$$۱+۳+۵+۷+۵+۳+۱=۳^۲+۴^۲$$

.
.
.

$$۱+۳+...+(۲n-۱)+(۲n+۱)+(۲n-۱)+...+۳+۱=?$$

منبع

Nelsen. Roger B, Proofs without Words, v.1, The Mathematical Association of America, 2015.